ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ПРОЕКТИВНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Р.Б. Чинак
(Омский политехнический институт)

В работе изучаются свойства компактного комплексного многообразия M, которые обеспечивают большую размерность группы автоморфизмов $Aut(M)$. Введем следующие обозначения. Пусть $\pi : E \to M$ является линейным голоморфным расслоением над M. Свяжем с любым набором сечений $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ (где $\alpha_j \in H^0(M, \mathcal{O}(E))$ и $n = \dim M > 0$) отображение $\psi_A : -E \to \mathbb{C}^{n+1}$ вида $\psi_A(v) = (\alpha_1(v), \dots, \alpha_{n+1}(v))$, $v \in -E$. Пусть $\tilde{\alpha}_j$ означает голоморфную функцию на пространстве расслоения $-E$, ассоциированную с сечением α_j и $P(A) = \{v \in -E / d\tilde{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\alpha}_{n+1}(v) = 0, v \neq 0)$. В дальнейшем под $|A|$ понимаем линейную систему, порожденную набором A и пусть $\pi' : -E \to M$ означает проекцию двойственного к E расслоения. Легко видеть, что подмножество $P'(A) = \pi'(P(A)) = \{x \in M / \exists v \in P(A), \pi'(v) = x\}$ аналитично в многообразии M. В работе использовано понятие положительного линейного расслоения [1, с. 162].

. Т е о р е м а. Пусть M – компактное многообразие и $\pi : -E \to M$ – некоторое положительное голоморфное линейное расслоение, допускающее систему сечений $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ (где $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$ со свойствами: 1) линейная система $|A|$ не имеет базисных точек; 2) выполнено включение $P'(A) \subset \{x \in M \mid \alpha_1(x) = 0\}$.
Тогда $Aut(M)$ содержит комплексную группу Ли, изоморфную группе комплексных невырожденных матриц $Gl(n, \mathbb{C})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дальнейшем условимся не указывать зависимость от A в ранее введенных обозначениях. Символ $-E$ означает либо соответствующее расслоение, либо пространство этого расслоения. Считаем, что M вложено в $-E$ как нулевое сечение.

Введем в $\mathbb{C}^{n+1}$ координаты $z^1, \dots, z^{n+1}$, естественно ассоциированные с функциями $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{n+1}$. Покажем вначале, что сужение ψ' отображения ψ на многообразие $N = -E \setminus M \cup P$ осуществляет конечнолистное накрытие N на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\}$.

Положим $\mathcal{D} = -E \setminus \{$нулевое сечение$\} = -E \setminus M$ и $\Phi = \psi|_{\mathcal{D}}$. Поскольку $|A|$ не имеет базисных точек, то Φ отображает область $\mathcal{D}$ в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. При этом $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ является собственным. Следовательно, по теореме Реммерта (см., например, [2, с. 204]) множество $\Phi(\mathcal{D})$ представляет собой аналитическое подмножество в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

Покажем теперь, что $\Phi(\mathcal{D}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.
В силу сделанного выше замечания достаточно установить, что множество вырождения P отображения Φ не совпадает с $\mathcal{D}$, т.е. $-E \setminus P \neq \emptyset$. По условию 2) теоремы это выполнено, если $\{x \in M \mid \alpha_1(x) = 0\}$ является собственным аналитическим подмножеством в M. Поскольку E положительно, то для некоторого натурального $k > 0$ расслоение kE очень обильно (см. [1, с. 211]). Так как $\alpha_j \otimes \dots \otimes \alpha_j$ (k раз) лежат в $H^0(M, \mathcal{O}(kE))$, то $M(\alpha_j) = M \setminus \{x \in M \mid \alpha_j(x) = 0\}$ не содержит компактных ненульмерных аналитических подмножеств и $\bigcap_{j=\overline{2,n+1}} \{\alpha_j = 0\}$ ненульмерно.

Предположив теперь, что $\{\alpha_1 = 0\} = M$ приходим к противоречию с условием 1) теоремы.

Итак, $\Phi(\mathcal{D}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ и отображение $\psi' : N \to \mathbb{C}^{n+1} / \{z^1 = 0\}$ осуществляет конечнолистное накрытие. Поскольку все накрытия над $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\}$ классифицируются отображениями вида

$$W^p(z) = ((z^1)^p, z^2, \dots, z^n) : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\},$$

то существует натуральное p, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} -E \setminus M \cup P = N \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "F"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\} \\ \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\} \arrow[r, "W^p"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\} \end{tikzcd} \tag{1}$$

замыкается до коммутативной с помощью биголоморфного изоморфизма $F : N \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\}$.

Следовательно, группа автоморфизмов $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{z^1=0\}$ вида $(z^1,z')\to(z^1,Az')$, где A невырожденная матрица размерности $n\times n$, поднимается с помощью диаграммы (1) до группы G автоморфизмов многообразия N. По уже упомянутой теореме Кодаиры многообразие $-kE\setminus M$ вкладывается в некоторое комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^{\ell}$ для достаточно большого k. Пусть $d: -E\setminus M \to kE\setminus M$ означает естественное k-листное накрытие. Рассмотрим любой элемент $g\in G$ и заметим, что отображение $d\circ g: N\to -kE\setminus d(P)\cup M$ записывается в виде набора $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\ell)$ голоморфных функций на N. По теореме Римана функции σ_j и отображения g, g^{-1} продолжаются на аналитическое подмножество P. Таким образом, построена группа $\tilde{G}$ биголономных преобразований многообразия $-E\setminus M$, изоморфная $GL(n,\mathbb{C})$.

Из коммутативности диаграммы (I) вытекает, что любой элемент $\tilde{g}\in\tilde{G}$ индуцирует послойное преобразование $-E\setminus M$ и поэтому естественно определяет биголоморфное отображение $\varphi=\varphi(\tilde{g})\in \mathrm{Aut}(M)$. Группа $\varphi(\tilde{G})$ также изоморфна $GL(n,\mathbb{C})$.

Нетрудно показать, что структура комплексной группы, вводимая таким образом на $\varphi(\tilde{G})$, согласована с компактно открытой топологий.

Итак,
$$\mathrm{Im}\,\varphi\cong GL(n,\mathbb{C}).$$

Библиографический список

1. Г р и ф ф и т с Ф., Х а р р и с Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. Т. 1. 496 с.

2. Г а н н и н г Р., Р о с с и Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 395 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I8 1987

УДК 514.75

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ФИГУРЫ В ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ СВЯЗНОСТИ

Ю. И. Ш е в ч е н к о
(Калининградский университет)

С помощью ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности главного расслоения введено понятие параллельного переноса фигуры в линейной комбинации связности. Примером такого переноса на поверхности проективного пространства является смещение плоскости Картана в гиперплоскости, натянутой на эту плоскость и нормаль второго рода А.П. Нордена.

Предварительно изложим понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности главного расслоения с помощью способа Лаптева задания связности в этом расслоении. Такое изложение можно считать 4-м способом определения ковариантного дифференциала [5]. Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой M_n которого является окрестность точки p n-мерного дифференцируемого многообразия, а типовым слоем - r-членная группа Ли G_r. Это расслоение имеет структурные уравнения [1, с. 51]:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j \quad (i,j=\overline{1,n};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{n+1,n+r}),$$

$$d\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+\omega^i\wedge\omega^\alpha_i.$$

Связность в расслоении $G_r(M_n)$ задается [1, с. 62, 82] с помощью форм $\tilde{\omega}^\alpha=\omega^\alpha-\Gamma^\alpha_i\,\omega^i$, где Γ^α_i - некоторые функции. Дифференцируя формы $\tilde{\omega}^\alpha$ внешним образом, получим

$$d\tilde{\omega}^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\,\tilde{\omega}^\beta\wedge\tilde{\omega}^\gamma-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j\,\omega^i\wedge\omega^j+$$

$$+\ \omega^i\wedge(d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\,\omega^j_i+\Gamma^\beta_i C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma+\omega^\alpha_i),$$